SESION 11

DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

I. CONTENIDOS:

1. Distribuciones de probabilidad conceptos básicos.
2. Variables aleatorias.
3. Funciones de probabilidad y distribución.

II. OBJETIVOS:

Al término de la Clase, el alumno:

- Analizará la distribución de probabilidad.
- Distinguirá las funciones de probabilidad y de distribución.

III. PROBLEMATIZACIÓN:

Comenta las preguntas con tu Asesor y selecciona las ideas más significativas.

- ¿Puedes conocer la probabilidad que existe para que de 5 alumnos de matemáticas III, elegidos al azar de un grupo mayor aprueben con 10? ¿Cómo calcularías esta probabilidad?
- ¿Qué relación encuentras entre distribución de frecuencias y distribución de probabilidad?

IV. TEXTO INFORMATIVO-FORMATIVO:

1.1. Distribuciones de probabilidad conceptos básicos

Las distribuciones de probabilidad son descripciones de eventos o conjuntos de ellos asociados con sus respectivas probabilidades. Para una variable aleatoria, es la descripción de la probabilidad de ocurrencia de sus categorías. La distribución de sus frecuencias relativas, es igual a la distribución de sus probabilidades. Si la distribución de frecuencias relativas proviene de observaciones, es más útil que si se genera de manera teórica mediante el tratamiento matemático, esto es, representa mejor el mundo real. En esta clase abordaremos el tratamiento de las variables aleatorias discretas.

2.1. Variables aleatorias

Una variable aleatoria presenta una serie de categorías determinadas por el azar, sus categorías pueden describirse en una distribución de probabilidad. Por ejemplo, es una variable aleatoria la que corresponde al género sexual de un hijo que va a nacer, sus categorías son: niño y niña. En este mismo orden, es una variable aleatoria la condición de zurdo o diestro, etc.

Los ejemplos anteriores tienen categorías nominales. Una variable aleatoria discreta, tendrá sus categorías expresadas con números. Por ejemplo, la suma de puntos al lanzar dos dados, el número de hermanos que tiene un estudiante, etc.

3.1. Funciones de probabilidad y distribución

La función de probabilidad es una expresión matemática mediante la cual se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de cada categoría de una variable aleatoria. Es necesario que se cumplan dos condiciones para que una expresión sea una función de probabilidad:

a) Que las probabilidades que genere sean valores mayores o iguales que cero, pero menores o iguales que uno.

$$0 \leq P(X) \leq 1$$

b) Que la suma de las probabilidades asociadas con las categorías de la variable sea igual a uno.

$$\Sigma P(X) = 1$$

Una función de distribución muestra probabilidades acumuladas de una variable, con ella se puede conocer la probabilidad de obtener una categoría menor o igual que una categoría dada.

Ejemplo 1 Si se lanzan tres monedas al aire y luego se registran los resultados como "águila" o "sello", ¿cuál es la probabilidad de obtener al menos un águila?

Primero se construye el espacio muestral. Se representa la categoría "águila" con la letra A, y la categoría "sello" con la letra S. Espacio muestral:

(A, A, A) (A, A, S) (A, S, A) (A, S, S) (S, A, A) (S, A, S) (S, S, A) (S, S, S)

A partir del espacio muestral se construye la distribución de probabilidad. Tomemos como variable X, al número de águilas que pueden obtenerse, entonces:

X	f	f. r %	f. a (+) %	f. a (-) %
0	1	12.5	12.5	100
1	3	37.5	50	87.5
2	3	37.5	87.5	50
3	1	12.5	100	12.5

Con la distribución de probabilidad se responde la pregunta, ésta se interpreta como la probabilidad de obtener una o dos o tres águilas. Nos fijamos en la última columna y localizamos el porcentaje que corresponde a la categoría 1, la probabilidad es del 87.5%. Esto debido a que la última columna es la frecuencia acumulada "o más", y necesitamos la probabilidad de obtener una o más águilas.

Ejemplo 2 Para el mismo fenómeno aleatorio descrito en el ejemplo anterior, determina si la siguiente expresión es la función de probabilidad que lo describe.

$$P(x) = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{8}x + \frac{1}{8}$$

Sustituyendo, las categorías de la variable:

$$P(0) = -\frac{1}{8}(0)^2 + \frac{3}{8}(0) + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$
$$P(1) = -\frac{1}{8}(1)^2 + \frac{3}{8}(1) + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$
$$P(2) = -\frac{1}{8}(2)^2 + \frac{3}{8}(2) + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$
$$P(3) = -\frac{1}{8}(3)^2 + \frac{3}{8}(3) + \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

Como podemos ver, los resultados son números comprendidos en el intervalo de cero a uno, además la suma de las probabilidades es igual a uno. Entonces se cumplen las dos condiciones antes descritas.

La esperanza matemática es el la categoría más probable, es el valor central de la distribución de probabilidad, la media. Se determina mediante la sumatoria de los productos de las categorías de la variable por su probabilidad asociada.

La desviación estándar de una distribución de probabilidad, se calcula mediante la raíz cuadrada de la sumatoria de los cuadrados de las diferencias entre las categorías de la variable y su esperanza matemática, por las probabilidades asociadas.

Ejemplo 3 Para el caso anterior, ¿cuál es la esperanza matemática y cuál es su desviación estándar?

Se construye la distribución de probabilidades y luego se emplean las fórmulas que se indican

X	f	P(X)	X P(X)	$X-\overline{X}$	$(X-\overline{X})^2$	$(X-\overline{X})^2 P(X)$
0	1	0.125	0	-1.5	2.25	0.28125
1	3	0.375	0.375	-0.5	0.25	0.09375
2	3	0.375	0.75	0.5	0.25	0.09375
3	1	0.125	0.375	1.5	2.25	0.28125
			1.5			0.75

La esperanza matemática se calcula con la fórmula:

$$\overline{X} = \Sigma XP(X)$$

Donde $\Sigma XP(X)$ es la suma de los valores de la cuarta columna, entonces:

$\overline{X} = 1.5$

La desviación estándar con la fórmula:

$$S = \sqrt{\Sigma(X-\overline{X})^2 P(X)}$$

Donde la sumatoria que se indica en la fórmula es la correspondiente a la última columna, entonces:

$$S = \sqrt{0.75}$$
$$S = 0.866$$

Los resultados anteriores significan que:
Se espera que en una gran cantidad de repeticiones, la cantidad promedio del número de águilas sea de 1.5
Las categorías de la variable se desvían, en promedio 0.866 unidades respecto de la esperanza.

V. ESTRATEGIAS CENTRADAS EN EL APRENDIZAJE:

A. Realiza las siguientes actividades.

1. Indica si los datos siguientes en cada inciso son funciones de probabilidad. Si no explica por qué.

a) $P(x) = \frac{1}{2}$ para x = 6, 7, 8, 9

b) P (x) = 78 para x = 1, 2, 3,

c) $P(x) = \frac{x}{7}$ para x = 0, 5, 10

d) $P(x) = x^3$ para x = 2, 0, .5, 0, 3

2. Sea x = número de “caras” obtenidas al jugar tres monedas balanceadas. Si salen dos o más ‘’caras” se reciben $200, si no, hay que pagar $100. ¿Cuál es la ganancia del juego?

3. Supongamos que de un sorteo se venden 1,000 billetes a $500 cada uno y que se van a otorgar tres premios. El primero, es una televisión de $25, 000, el segundo un minicomponente de $ 9,000; y el tercero, un DVD de $ 2,500. Si se va a comprar un billete. ¿Cuál es la ganancia o pérdida esperada?